

הרב יעקב לויפר

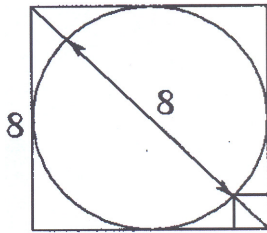
'עמוד שהוא מוטל לאוויר'

מדוע נקטה המשנה היקף כה גדול?
שיטת דייני דקיסרי
דברי רבינו חננאל
שיטת רבי חנילאי מחוזנאה
ביאור משנת אהלות על פי רבי חנילאי
דעת רבי יוסי
נספח: חישוב שיעור הקוטר השוקע בקרקע

מדוע נקטה המשנה היקף כה גדול?

במסכת אהלות (יב, ז) שנינו: "עמוד שהוא מוטל לאויר, אם יש בהיקפו עשרים וארבעה טפחים מביא את הטומאה תחת דופנו, ואם לאו - טומאה בוקעת ועולה בוקעת ויורדת".

כוונת המשנה, כפי שמבארים כל מפרשיה, לגליל שמוטל לאורכו על הארץ וכזית מן המת נמצא בצידו ומתחתיו; הדיון הוא אם תחת צידי הגליל אפשר למצוא חלל של טפח על טפח ברום טפח, שהוא השיעור המינימלי של אוהל המביא את הטומאה לכל מה שתחתיו, ואף חוצץ בפני הטומאה שלא תבקע עד הרקיע. אם ימצא שיש שיעור כזה, כל מה שיימצא תחת אותו צד לכל אורכו של הגליל יקבל טומאה, גם אם הגליל ארוך ביותר, ומאידך מה שיימצא מעל הגליל לא יקבל טומאה, שכן הגליל יחצוץ בינו ובין הטומאה.



תרשים 1

בתרשים 1 נמצא חתך רוחב של גליל שהיקפו 24 החסום בריבוע. כפי שאפשר לראות בציור, השיעור עשרים וארבעה טפחים בהיקף הגליל נדרש כדי שיהיה בקוטרו שמונה טפחים (קוטר הגליל שווה לאורך צלע הריבוע), ובמקרה כזה, כך נוקטת המשנה, יהיה בחללים שמתחת שני צידי הגליל מקום של טפח על טפח ברום טפח. המשנה נוקטת כמוכן את היחס

הידוע שנוקטים חז"ל, ולפיו היקף עיגול הוא פי שלושה מקוטרו, ולא יותר. יחס זה מובא במשנה הקודמת, הקובעת כמה צריך להיות היקפה של קורה כדי שתחשב אוהל ברוב טפח ותביא את הטומאה אל כל מה שתחתיה ותחצוץ בפני הטומאה שלא תבקע מעליה: "בזמן שהיא עגולה - הקיפה שלושה טפחים. בזמן שהיא מרובעת - ארבעה, שהמרובע יתר על העיגול רביעי".

כל מפרשי המשנה, החל מהראשונים כהר"ש והרא"ש, וכלה באחרונים כגון תוס' יום טוב, תפארת ישראל והרש"ש, עומדים על בעיה חמורה המתגלה במשנה זו: הרי את החישוב עושים לכאורה לפי הכלל הידוע "כל אמתא בריבועא, אמתא ותרי חומשי באלכסונא" (סוכה ה, א). לפיכך, מכיון שיודעים אנו שמידותיו של מרובע שהגליל חסום בתוכו [כמשורטט בתרשים 1] הם שמונה טפחים על שמונה טפחים, אזי אלכסונו יניב לנו 16 חומשי טפח נוספים (מעבר לשמונת הטפחים של קוטר הגליל), שמונה חומשים בכל צד מצידי הגליל. אך הרי כדי לקבל טפח מרובע בצידו של הגליל איננו צריכים אלא **שבעה** חומשי טפח באלכסון, כי טפח בריבוע הוא טפח ושני חומשים באלכסון; אם כן מדוע קבעה המשנה שרק גליל שבהיקפו 24 טפחים מביא את הטומאה תחת דופןו, הרי גם אם היקפו היה 23 או 22 ואף 21 טפחים הדין היה שווה!

הר"ש בפירושו למשנה מביא שני תירוצים לבעיה זו: ראשית - "לא נשתייר לנו יותר על הצורך אלא חומש אחד, ומשום חד חומשא לא דק. ועוד, פירשנו בעירובין דכל אמתא בריבוע אמתא ותרי חומשי באלכסונן אינו מכוון לגמרי, שחסר ממנו מעט [=האלכסון האמיתי מעט יותר גדול], כמו שהוכחתי שם".

כוונת הר"ש בתירוצו השני היא למה שכבר כתבו כמה וכמה ראשונים (עיין למשל בתוספות ובמאירי לסוכה שם) שהכלל של 'אמתא בריבועא' הוא רק קירוב, ולמעשה האלכסון של ריבוע אמה גדול מעט יותר מאשר אמה ושני חומשים. הדרך המדוייקת למציאת אורך האלכסון היא על ידי משפט פיתגורס הידוע¹, ממנו נגזר שבריבוע שצלעותיו שוות כדי לקבל את אורך האלכסון עלינו להכפיל את אורך הצלע בשורש 2; האורך המדוייק הוא אפוא לא 1.4 [אמתא ותרי חומשי] אלא מעט יותר: 1.4142... לפי זה - הניח הר"ש - יוסבר הצורך בחומש הנוסף בצד הגליל הנ"ל, או לפחות בחלק ממנו.

אך רבי שמעון בן צמח דוראן בשו"ת התשב"ץ (ח"א סי' קסה, סוף עמ' שסה במהד' מכוון שלמה אומן) מביא את דברי הר"ש, וכותב עליו: "ומצאתי הגהה על לשון זה בגליון הספר שלי² שזה לשונה: 'ועוד' זה שכתב הרב ז"ל - לא ידע כי בנפשו הוא! הוסיף קמח - צריך להוסיף מים, כי עתה ישתייר לנו יותר מהצורך, יותר מחומש!" ואכן חשבונו של הר"ש תמוה מאוד, שהרי כמו שהתארך האלכסון של הטפח שבצד הגליל כך התארך אלכסונם של שמונת טפחי קוטר הגליל (עיי"ש הע' 114); אם נחשב את אלכסון הריבוע החוסם לפי משפט פיתגורס הנ"ל נקבל 11.3137 טפחים, ננכה מהם את שמונת טפחי קוטר הגליל³ ונישאר עם 1.6569 טפחים לכל צד, שזה

- 1 שבמשולש ישר זווית אורך הניצב בריבוע ועוד אורך הבסיס בריבוע שווה לאורך היתר (=הצלע האלכסונית) בריבוע.
- 2 מסתבר שהכוונה להגהה של הרשב"ץ עצמו על גליון ספרו.
- 3 עדיין בהנחה שהקוטר אורכו שליש מההיקף כמקובל בחז"ל, ורק לגבי יחס הצלע לאלכסון אנו נוקטים מידה מדוייקת; אמנם גם אם נחשב את קוטר העיגול בן 24 הטפחים לפי ערכו המדוייק (ואז אורכו יהיה כ-7.64 טפחים ולא 8) הקושיא נשארת בעינה. ואכמ"ל.

יותר מטפח ושלושה חומשים [שהם 1.6]. אורך הצלע של ריבוע כזה יהיה 1.117 טפחים, כך שגם המידה המדויקת של אלכסון הריבוע לא תעזור לנו להבין מדוע נקטה המשנה היקף של 24 טפחים ולא פחות!⁴ ושמא נאמר כתירוצו הראשון של הר"ש "משום חד חומשא לא דק?" אמנם תירוץ זה מוקשה מאוד מכמה פנים:

א. הגמרא מציינת כמה פעמים "אימור דאמרינן לא דק - לחומרא, לקולא מי אמרינן לא דק?". ו'לא דק' שבכאן - קולא הוא גם כן, שהרי אפילו אם היקף העמוד יהיה רק 21 טפחים יכילו צדדיו חלל של טפח על טפח, נמצא שאם נמצאת טומאה בצידי של עמוד שהיקפו מ'21 טפחים ועד מעט פחות מ'24 טפחים, וטהרות נמצאות באותו צד רחוק יותר - נטהר את הטהרות משום שאין בהיקפו של העמוד 24 טפחים, למרות שמצד האמת יש שם חלל טפח; וכן מי שהכניס שם את ידו יוכל להיכנס לבית המקדש ללא טבילה ויתחייב כרת!

ב. הרעיון של 'לא דק' מובא תמיד כהסבר למקרים שהדיוק היה דורש שימוש בשברים, והתנא מעדיף לנקוט מספר עגול ועיין סוכה ה, א; ב"ב כז, א; ועוד). אבל כאן מספיק היקף של 21 טפחים כדי לקבל קוטר של שבעה טפחים [לפי היחס הידוע שנוקטים חז"ל בכל מקום: $3 = \pi$]. ומכיון ששבעה טפחים יספיקו לנו 14 חומשים באלכסון - הרי שיש לנו לכל צד בדיוק שבעה חומשים, שיעור אלכסונו של טפח⁵, ואין שום טעם מדוע נוקט התנא בשיעור של 24 טפחים, בעוד שמספיקים 21!

ושמא נאמר: התנא ידע את היחס האמיתי של הערך 'פאי' (π) שהוא שלוש ושביעית בקירוב, ולפיו צריך יותר מ'21 טפחים כדי לקבל קוטר של שבעה טפחים; אך לפי זה צריך 22 טפחים לכל היותר, ועדיין לא עשרים וארבע!⁶ וזולת זאת: רשב"ץ מוכיח היטב באותה תשובה שחכמים נקטו את היחס של $3 = \pi$ בכל מקום, בין לקולא ובין לחומרא, והתעלמו לגמרי מהיחס האמיתי.⁷

4 גם ר"י טרני בשו"ת מהרי"ט ח"ב יו"ד סי' ו' עמד על קושי זה.
 5 גם לפי השיעור המדויק של האלכסון נקבל מספיק כדי טפח, ואפילו מעט יותר: 1.0509, שכן הגדלת אורך האלכסון רק מטיבה עמנו, כפי שציין הרשב"ץ.
 6 מלבד הבעיה של 'לא דק לחומרא' שהזכרנו.
 7 נביא שתים מההוכחות שלו: המשנה הקודמת באהלות אומרת שקורה שהיקפה שלושה טפחים כבר תביא את הטומאה ותחצוץ בפני הטומאה, לפי שקוטרה טפח. אבל באמת לפי היחס האמיתי אין כאן עדיין קוטר טפח אלא מעט פחות, נמצא שלא תחצוץ בפני הטומאה שתחתיה, והרי זה לקולא. כמו כן, הגמרא במסכת סוכה (ה, א) דנה בדברי רבי יוחנן שהצריך סוכה בהיקף של 24 אמות, כדי שיהיה אפשר לרבע בתוכה ריבוע של ד' על ד' אמות. הגמרא תמהה מאוד על דבריו, ומיישבת אותם קירוב אחר קירוב. לבסוף מגיעה הגמרא למסקנה שרבי יוחנן התכוון להיקף של שמונה עשרה אמות, ובאמת היה מספיק 16.8 אמות, אלא ש'לחומרא לא דק'; אבל הרשב"ץ מוכיח שלפי היחסים האמיתיים דייק רבי יוחנן להפליא, נמצא שאין עליו שום קושיא ולא צריך להגיע לתירוץ 'לא דק', ואעפ"כ

זאת ועוד; בתוספתא דאהלות פי"ג⁸ מובא דין זה כך: "עמוד שהוא מוטל באויר אינו מביא טומאה תחת דופןו עד שיהא בהיקפו עשרים וארבעה טפחים. ר' יוסי אומר: עשרים וחמשה, שהיה ר' יוסי אומר אין לך עשרים וחמשה שאין הארץ אוכלת בהן טפח". כלומר: מכיון שכובד העמוד משקיף בארץ 1/25 מן ההיקף, צריך להוסיף עוד טפח על היקף העמוד כדי להישאר עם 24 טפחים בהיקפו. אבל אם באמת לא צריך להיקף אלא 21, או לכל היותר 22 טפחים - מה אכפת לנו שטפח מן ההיקף שוקע בארץ? והלא עדיין נשארים לנו עשרים ושלושה טפחים? על זה ודאי לא שייך להגיד 'לא דק', שהרי כל דברי ר' יוסי מיותרים לאור העובדה שאפשר לוותר על שנים או שלושה טפחי היקף. הקושיא נעשית חמורה במיוחד לאור העובדה שטפח מן ההיקף השוקע בארץ גורם לשקיעת חלק מזערי מן הקוטר, פחות משבע מאיות הטפח⁹, וזה מקוץ כהנה וכהנה עם שני הטפחים העודפים.

ג. תירוץ נוסף כותב הר"ש שם: "ועוד, דאי אפשר שלא תהא הארץ אוכלת מעט מן העמוד". כלומר: דרוש היקף ארוך יותר משום שחלק מן העמוד שוקע בקרקע. אמנם דבריו תמוהים מאוד - שהרי זוהי בדיוק טענת ר' יוסי בתוספתא [שהר"ש עצמו מצטט], ולכן הוא מצריך להוסיף טפח אחד להיקף;

נאלצת הגמרא להגיד 'לא דק'. הרי בהכרח שהגמרא נקטה שהלכתית אין צורך להתייחס ליחס האמיתי של ט, או לערך האמיתי של אלכסון הריבוע ביחס לצלעו, אפילו ב'מחיר' של הסבר דברי ר' יוחנן - המדוייקים - כ'לא דק'. דרך אגב, יש בנותן טעם לציין את שאלת תוספות הרא"ש (עירובין יד, א) התמה: "מה שייך למיבעי הכא 'מנא הני מילי' בדבר הנראה לעינים ואדם יכול לעמוד עליו, יביאו דבר שהוא רחב טפח ונמדוד ההיקף?" ומתרץ: "לפי שאין הדבר מכוון, שההיקף הוא יותר מג' טפחים, קא בעי תלמודא מנין לקחו חכמים ליתן גבול ומדה לדבר אחד אע"פ שאינו מכוון אלא שהדבר קרוב להיות מכוון. ומייתי ראיה דקרא נמי קא עביד הכי, דים של שלמה שהיה רחב עשר, וקאמר קרא ד'קו שלשים אמה יסוב אותו אע"פ שהוא ארוך יותר". ומעניין שבעל 'ערוך השולחן' (או"ח סי' שסג סע' כב) שלא ראה את דברי תוספות הרא"ש שואל ומתרץ באופן זהה כמעט: "...ואע"ג דאין החשבון מדוקדק לפי חכמי המדות, מ"מ כן גזרה התורה למדוד, וילפינן לה מים של שלמה דכתיב 'עשר משפתו עד שפתו וקו שלשים באמה יסוב אותו סביב' (מ"א ז, כג). וזהו ששאלו בגמ' 'מנא הני מילי? וקשה: ניתי חוט ונמדוד! אלא דזה גופה מקשה, והא אין החשבון מכוון, ומתרץ שהתורה צותה כן". [אמנם יתכן שניתן לענות על הטענה 'נייתי חוט ונמדוד' שזו דרך הגמרא לחפש מקור בפסוק, בחינת 'אסתכל באורייתא וברא עלמא'. יעויין לדוגמא בר"ה כג, ב: "דאמר רבי יוחנן: מאי דכתיב 'המשל ופחד עמו, עושה שלום במרומו', מעולם לא ראתה חמה פגימתה של לבנה". וכן הדיון במסכת ברכות (לה, ב) אם יין משביע או לא, ואין מחפשים לברר את המציאות אלא מפלפלים בפסוק 'יין ישמח לבב אנוש... ולחם לבב אנוש יסעד'].

8 הנוסח הועתק ממהדורת צוקרמאנדל, שם זו הלכה ט.

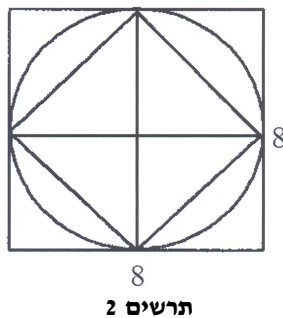
9 יעויין בנספח שבסוף המאמר.

נראה אם כן שתנא קמא אינו נזקק לטענה זו. ובר מן דין, הרי כפי שכתבנו ישאר לנו מספיק.

יעויין שם בתוס' יום טוב שמנסה אף הוא לתרץ את המשנה¹⁰, ובאריכות בשו"ת מהרי"ט (ח"ב יו"ד סי' ו), אך בסופו של דבר, כפי שמסכם ר' פינחס קהתי את ביאורו למשנה זו, "עדיין צריך עיון".

שיטת דייני דקיסרי

והנה נתגלתה לי פיסקה מעניינת בדברי רבינו חננאל, שכמדומני שופכת אור חדש על משנה זו. המדובר הוא בפירוש הר"ח לעירובין עו, א בענין חלון עגול, שרבי יוחנן אומר שצריך שיהיה היקפו עשרים וארבעה טפחים כדי שיוכלו לרבע מתוכו ריבוע של ד' על ד' טפחים. והגמרא הולכת ומבררת את דברי רבי יוחנן, ולבסוף מסיקה בקושיא: "מכדי כל אמתא בריבוע אמתא ותרי חומשי באלכסונא, בשיבסר נכי חומשא סגיא!" כלומר: אלכסון של ריבוע ד' על ד' הוא 5.6 טפחים לפי הכלל של 'אמתא בריבועא'. נכפיל אלכסון זה בשלוש כדי לקבל את ההיקף של החלון העגול, ונמצא שמספיקים 16.8 טפחים, דהיינו 'שיבסר נכי חומשא'. מדוע הוצרך רבי יוחנן להיקף של עשרים וארבעה טפחים? והגמרא מסיקה: "רבי יוחנן אמר כי דייני דקיסרי, ואמרי לה כרבנן דקיסרי, דאמרי: עיגולא מגו ריבועא - ריבועא, ריבועא מגו עיגולא - פלגא".



דיו רב נשפך, וקולמוסים רבים נשתברו, בביאור שיטתם של דייני דקיסרי. נתאר את שיטת התוספות שם, המפרשים את שיטתם באופן נוח-יחסית: לוקחים ריבוע שצלעותיו שמונה על שמונה טפחים, חולקים אותו לארבעה ריבועים שווים שצלע כל אחד מהם ארבעה טפחים, אלכסוני הריבועים האלו יוצרים ריבוע קטן יותר שצלעותיו ניצבות בזווית של 45 מעלות ביחס לריבוע הגדול (ראה תרשים 2). שטחו של הריבוע הפנימי הוא בדיוק חצי משטח

הריבוע הגדול, שהרי הוא מכיל ארבעה חצאים של ארבעת רבעי הריבוע הגדול. בין שני הריבועים נשרטט עיגול החוסם את הריבוע הקטן וחסום בתוך הריבוע הגדול. שטחו של עיגול זה [לפי הקירוב של $\pi=3$] הוא בדיוק שלושה רבעים מהריבוע הגדול¹¹. זהו אפוא הכלל של דייני דקיסרי: עיגולא מגו ריבועא - ריבועא [שטח

10 ועייין ברש"ש ובחידושי אנשי שם המעירים כי לא הועיל כלום, ואף מצביעים על טעויות בחשבונותיו.

11 נוסחת חישוב שטח עיגול היא $r^2\pi$, דהיינו הכפלת הרדיוס בעצמו והכפלת התוצאה ב'פאי'. שטח העיגול החסום הוא אם כן $4 \times 4 \times 3 = 48$, שטח הריבוע החוסם הוא $8 \times 8 = 64$ ו- $48:64 = 3:4$.

העיגול חסר רבע מהריבוע הגדול, ריבועא מגו עיגולא - פלגא [הריבוע הקטן שחסום בתוך העיגול, שטחו חצי מהריבוע הגדול]¹².

עד כאן הכל מדוייק, כמובן לפי היחס של $\pi=3$ ¹³. אלא שהגמרא ור' יוחנן פירשו שכוונת דייני דקיסרי היא שהיחסים האלו נכונים גם בנוגע להיקף הצורות המדוברות. כלומר: אם היקף הריבוע הגדול, שצלעו שמונה טפחים, הוא 32 טפחים, הרי שהריבוע החסום בתוכו יהיה היקפו 16 טפחים, והעיגול שביניהם [ששטחו כזכור 3/4 משטח הריבוע הגדול] יהיה היקפו 24 טפחים.

דבר זה מוביל לאבסורדים חריפים ביותר: ריבוע שצלעו שמונה טפחים מכיל 64 טפחים מרובעים, ואילו ריבוע שצלעו ארבעה מכיל רק 16 טפחים. והרי הריבוע הקטן שטחו בדיוק חצי מהריבוע הגדול, והוא אמור להכיל 32 טפחים מרובעים! זאת ועוד: תוספות (עירובין עו, ב ד"ה ורבי יוחנן) מעירים שלפי זה בהכרח שדייני דקיסרי סברו כי אמתא בריבועא - תרי אמין באלכסונא, שהרי אלכסונו של הריבוע הקטן הוא כרוחב הריבוע הגדול - שמונה טפחים, וצלעותיו של הריבוע הקטן אינן אלא ארבעה¹⁴. אך צלעותיו של הריבוע הקטן הן אלכסוניהם של ארבעת הריבועים שחילקנו מהריבוע הגדול; הייתכן שצלעותיהם באורך ארבעה טפחים וגם אלכסוניהם באורך הזה?

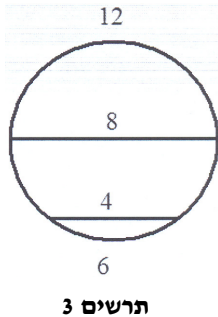
הגמרא במסכת סוכה אכן מעירה "ולא היא, דהא קחזינן דלא הוי כולי האי", והראשונים תמהים טובא כיצד יכלו דייני דקיסרי לשער באופן מוטעה שכזה. התוספות בסוכה (ה, ב ד"ה ריבועא) כותבים "ותימה, היאך טעו במידה רבי יוחנן ודייני דקיסרי, דמאחר שלא מדדו הדבר - היאך עשו כלל על דבר שאינו? ויש לומר דקבלה בידם לשון זה של 'ריבוע מגו עיגולא פלגא', והוא אמת לענין המקום [=השטח] ולא לענין אורך החוט המקיף". בעירובין מפרשים התוס' באופן שונה קצת, שדייני דקיסרי אכן התכוונו לשטח ולא לענין ההיקף כלל, אלא שרבי יוחנן והגמרא טעו בדבריהם וחשבו שהם מדברים לענין ההיקף.

הרשב"א בעירובין (עו, ב) נותן קצת טעם לטעותם של דייני דקיסרי. הם ידעו שקוטר העיגול הוא שלישי מהיקפו, ושעל פי זה יחס קו ישר אל חצי היקף העיגול שהקו מהווה לו בסיס הוא יחס של 2:3; אך הם סברו שהיחס הזה יציב, ללא הבדל היכן ממוקם הקו שחוצה את העיגול (ראה תרשים 3):

12 ישנן שיטות אחרות בהסבר המילים 'ריבועא מגו עיגולא פלגא' [ענין למשל בפירוש הריב"ן למסכת סוכה (הודפס בגנוזות א עמ' כו) "דייני דקיסרי אתו לתרוצי מילתא דר' יוחנן... וריבועא מגו עיגולא פלגא, כלומר כשעושיין ד' אמות מרובעות תוך העיגול יתר העיגול על הרבוע חצי ההיקף של ריבועא, דהיקף של ארבע אמות עולה לששה עשר, וחצי של י"ו אמה גדל העיגול עליו, דהיינו שמונה אמות, והן הן עשרים וארבע אמות דנקיט ר' יוחנן", ויעויין גם בפירוש הריטב"א לעירובין] אך לעצם חישוב השטח אין הבדל ביניהן.

13 היחס האמיתי מגדיל מעט את שטח העיגול.

14 גם רש"י שם סוד"ה ריבוע אולי רומז לכך, באמרו "דסבירא להו דכל אלכסונא הכי הוי".



כשם שהקשת המקבילה לקו החוצה את העיגול באמצעו, שאורכו 8, היא 12, כלומר: היחס שלה לקו האמצעי הוא פי 3:2, כך לדעתם הקשת שבסיסה הקו הקטן יותר שאורכו 4 אורכה אורכה יהיה באותו יחס: 3:2, ולפיכך הוא יהיה שישה טפחים.

כמובן שהיחס הזה אינו נכון, שהרי הדבר תלוי בקימור הקשת: הקשת המקבילה לקו החוצה את העיגול קמורה הרבה יותר, ועל כן אורכה הרבה יותר; אבל יש בזה בנותן טעם כיצד יכלו דייני דקיסרי להגיע למסקנה שנראית על פניה מופרכת כל כך¹⁵.

ואפשר להוסיף אולי עוד טעם: הכלל של 'כמה מרובע יתר על העיגול - רביעי', נכון גם לגבי ההיקף: היקפו של עיגול הוא פי שלושה מקוטרו, והיקפו של מרובע החוסם בתוכו עיגול זה יהיה פי ארבעה מהקוטר, שהוא צלע הריבוע. המשנה באהלות (יב, ו) כבר מציינת יחס זה לגבי ההיקף: "כמה יהא בהקיפה [של קורה] ויהא בה פותח טפח? בזמן שהיא עגולה - הקיפה שלושה טפחים, בזמן שהיא מרובעת - ארבעה, שהמרובע יתר על העגול רביעי". מכיון שדייני דקיסרי ראו כי היחס בין מרובע לעיגול החסום בתוכו הוא 4:3 בין לענין ההיקף ובין לענין השטח, הם שיערו שאף היחס בין העיגול ובין המרובע החסום בתוכו נכון הן לענין השטח והן לענין ההיקף.

יהיה הביאור בדעתם של דייני דקיסרי איך שיהיה, אנו נסתפק כרגע בעובדה שדייני דקיסרי סוברים שהיחסים בין עיגול לריבוע הכלוא בתוכו הם יחסים של 3:2, כלומר ששטח הריבוע הוא שני שלישי משטח העיגול - ואף היקף הריבוע הוא שני

15 יצויין כי היו נסיונות למצוא הגיון בדבריהם של דייני דקיסרי [זולת הסברים כמו של התוס' האומרים כי ר' יוחנן והגמרא טעו בדברי דייני דקיסרי, הסברים שאינם מועילים אלא להעתיק את הבעיה מאחד למשנהו, כפי שטוען הריטב"א בעירובין 'ואיני יודע מה הרווחנו לתלות הטעות בר' יוחנן, ועוד: תמה על עצמך שלא הבין ר' יוחנן מה שאנו מבינים בהם']. המאירי בסוכה ובעירובין מפרש שגם ר' יוחנן שדיבר על חלון שהיקפו כ"ד טפחים לא התכוון אלא לשטחו, והוא דוחק שבמלה 'בהיקפו' התכוון ר' יוחנן לשטח, היינו שיכנסו בתוך היקפו עשרים וארבעה טפחים. אבל דבריו מוקשים: נמצא שר' יוחנן לא נתן כלל שיעור שקל למדוד אותו, שהרי לא ניתן למדוד את שטח החלון מבלי לדעת את היקפו או קוטרו, ואם כן מה לו לתת את התוצאה? יתן את ההיקף או הקוטר! מלבד זאת הדברים מראים שדברי ר' יוחנן בעירובין מתאימים ומקבילים לדבריו במסכת סוכה, ושם הוא מדבר על סוכה שיושבים בהיקפה עשרים וארבעה בני אדם, ושם ודאי הכוונה להיקף, ואף המאירי מפרש שם כך, אלא שהוא טוען שלמימרא זו אין קשר לדייני דקיסרי, למרות שהגמרא מביאה אף שם את דברי דייני דקיסרי, יעויין שם ובתוס' שם סוף דף ח [יעויין בשו"ת 'גליא מסכת' לרבי דוד מנובהרדוק סימן ג (מהדורת וילנא, סוף חלק א, עמ' 151), הסובר כי ניתן לפרש את מימרות רבי יוחנן בסוגיות בסוכה ובעירובין ביחס לשטח ולא ביחס להיקף].

שליש מהיקף העיגול. לפיכך עיגול שהיקפו 24 חוסם בתוכו ריבוע שהיקפו 16, וזהו בדיוק ריבוע שצלעותיו ד' על ד'.

דברי רבינו חננאל

והנה רבינו חננאל בפירושו לעירובין שם בענין חלון, מביא את התוספתא דאהלות שהזכרנו, העוסקת בעמוד המוטל באויר ובחישוב הריבוע שצידיו יכולים להכיל. וזה לשון הר"ח שם: "תנא [בתוספתא] באהלות פי"ג: עמוד המוטל באויר אינו מביא את הטומאה תחת דופן עד שיהא בהיקפו כ"ד טפחים, ר' יוסי אומר כ"ה, אין לך כ"ה טפחים שאין הארץ אוכלת טפח".

אך לכאורה דברי הר"ח תמוהים טובא: רבי יוחנן בעירובין עוסק בריבוע שניתן ליצור בתוך חללו של העיגול, ואילו התוספתא באהלות עוסקת בריבוע שניתן ליצור **בצידי** העיגול, מהו הקשר בין שני הדברים?¹⁶ זאת ועוד: התוספתא באהלות ודאי אינה מתאימה לכאורה לדעת רבי יוחנן ודייני דקיסרי, שהרי לשיטתם 'אמתא בריבועא - תרי אמין באלכסונא', כפי שכתבו התוספות, ואם כן אלכסונו של ריבוע ח' על ח', שהעמוד [שקוטרו 8] חסום בתוכו, הוא 16 טפחים. נמצא שיש לנו אלכסון של **ארבעה** טפחים מכל צד של צידי הגליל, וזה די והותר כדי לרבע בו אפילו ריבוע של שני טפחים. לשיטתם אמור להספיק גליל בקוטר של 4 טפחים והיקפו יהיה 12 טפחים; אלכסון של ריבוע שגליל זה חסום בתוכו - אורכו יהיה 8 טפחים, שישארו לנו מהם שני טפחים מכל צד של צידי הגליל, ונוכל לגזור מהם ריבוע של טפח על טפח!

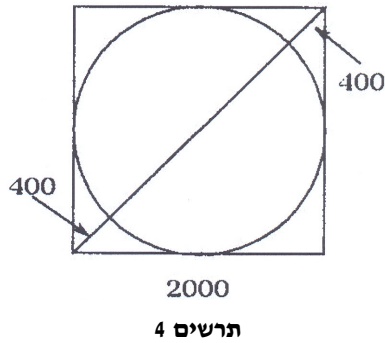
אמנם נראה שדווקא לפי שיטת דייני דקיסרי שיעורי המשנה והתוספתא באהלות מדוייקים. ונראה לומר כי היתה להם שיטה אחרת בחישוב האלכסון. הכלל של 'אמתא בריבועא - אמתא ותרי חומשי באלכסון' לא היה מקובל בידם¹⁷, לפיכך, כשהם ניגשו לחשב את שטח החלל שבצידי הגליל, הם לא נקטו את הצעד הפשוט לכאורה - לחשב את אלכסונו של הריבוע שהגליל חסום בתוכו, אלא השתמשו בשני הכללים שהיו מוחזקים בידיהם: עיגולא דנפיק מגו ריבועא - ריבועא, וריבועא דנפיק מגו עיגולא פלגא, ומשם הם גזרו את שיעור האלכסון. להלן נראה כי מדברי רבי חנילאי איש מחוזא עולה אכן הבנה אחרת בחישוב אלכסונו של ריבוע.

16 יעויין בראב"ד פי"ב מטומאת מת ה"ח המציע פירוש העוסק בחללו של העמוד, אמנם פירושו ודאי אינו לפי שיטת דייני דקיסרי, ואילו הר"ח מקשר בין התוספתא ובין שיטת דייני דקיסרי. וזולת זאת: לפי פירושו של הראב"ד אין הבנה לשיטת ר' יוסי החושש מפני שקיעת העמוד בקרקע, שהרי ממילא הנושא הוא חללו של העמוד.

17 ואכן הכלל של 'אמתא בריבועא' אינו מוזכר במשנה כלל, לעומת הכלל של יחס היקפו של עיגול לקוטרו, והכלל של 'מרובע יתר על העיגול רביע' הנזכרים שניהם במשנת אהלות (וב, ו). ויש לציין גם שהכלל 'אמתא בריבועא' אינו נזכר בירושלמי במפורש בשום מקום.

שיטת רבי חנילאי מחוזנאה

הסוגיא בעירובין (דף נו, ב) עוסקת בקביעת תחומי עיר עגולה שקוטרה הוא



אלפיים אמה. ברייתא המובאת שם אומרת שלענין תחום שבת מחשיבים את העיר כריבוע של אלפיים על אלפיים, ולפיכך נשכרים תושבי העיר את מקום 'הקרנות', היינו הזוויות של הריבוע החוסם בתוכו את העיגול של העיר, שכן זוויות אלו עודפות על העיגול. הברייתא אומרת: "נמצאת העיר משתכרת ארבע מאות אמות לכאן וארבע מאות אמות לכאן" (ראה תרשים 4).

חשבונה של הברייתא בנוי על הכלל "אמתא בריבועא - אמתא ותרי חומשי

באלכסונוא", לפיכך אלכסון של אלפיים אמות מוסיף עליהם 4,000 חומשי אמה, שהם שמונה מאות אמות. ארבע מאות לצד אחד של האלכסון הבולט מהעיגול, וארבע מאות לצד השני.

בהמשך הסוגיא מובאת קושייתו של רב חנילאי ממחוזא ששאל את רב אשי "מכדי, כמה מרובע יתר על העגול - רביע, הני תמני מאה? שית מאה ושיתין ושבע נכי תילתא הוי".

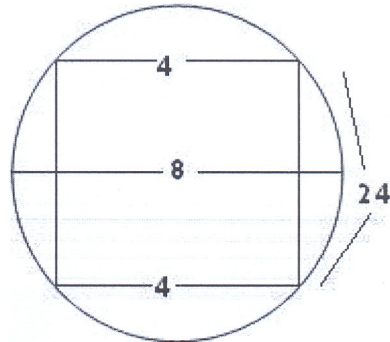
רב חנילאי שאל כיצד יתכן שאלכסון יהיה עודף כל כך על הריבוע, והרי "כמה מרובע יתר על העיגול - רביע", ולהבנתו של רב חנילאי הכלל הזה קובע את היחס בין קוטרו של העיגול לאלכסונו של הריבוע. אם קוטר העיגול הוא אלפיים, יהיה אלכסונו של ריבוע החוסם את העיגול יתר עליו שליש מקוטר העיגול שהוא רביע מאלכסון המרובע. ומכיון ששליש של אלפיים הוא שש מאות ששים ושבע חסר שליש, לא יהיה האלכסון יתר על הריבוע כי אם בשיעור הזה.

רב אשי שם עונה לרב חנילאי שהכלל של 'מרובע יתר על העיגול' עוסק בשטחם של הגופים, אבל כשאנו דנים על האלכסון הנמתח מקרן לקרן של הריבוע, ההפרש הוא גדול יותר, שכן 'אמתא בריבועא, אמתא ותרי חומשי באלכסונוא'. אבל מקושייתו של רב חנילאי אנו למדים שדעתו היתה כי "אמתא בריבועא - אמתא ושליש באלכסונוא", שזה מעט פחות (שליש הוא 0.3333..., ושתי חמישיות הן 0.4, ההפרש הוא קצת פחות משבע מאיות).

רב חנילאי מסביר שהוא למד את הכלל שלו מחצי המשפט הראשון של דיני דקיסרי: "עיגולא דנפיק מגו ריבועא - ריבועא", או בניסוח קצת שונה "כמה מרובע יתר על העיגול - רביע"; אלא שרב חנילאי סבר שהכלל הזה מתייחס לתוספת הבליטה שבולטות זוויות הריבוע מן העיגול הכלוא בתוכו, והכלל בא לומר שהתוספת היא שליש מקוטר העיגול, דהיינו רבע מן האלכסון [שהרי כשתוסיף

שליש מקוטר העיגול על אורכו, תקבל ארבעה שלישים, וכל שליש יהיה רבע מן האורך החדש].

לפי הבנה זו יתכן שגם החצי השני של משפט דייני קיסרי "ריבועא דנפיק מגו עיגולא פלגא" מתייחס בדיוק לאותו ענין: עיגול החוסם בתוכו ריבוע - קוטרו גדול מצלעות הריבוע פי שתיים (ראה תרשים 5).



תרשים 5

וזוהי הרי בדיוק מימרת רבי יוחנן בסוכה ובעירובין לגבי סוכה עגולה וחלון עגול: קוטרו של העיגול גדול פי שניים מצלעו של הריבוע החסום בתוכו, נמצא שבעיגול שקוטרו שמונה [וממילא היקפו הוא 24] יוכל להיכנס ריבוע שצלעו ארבע, והקוטר של העיגול יבלוט שני טפחים או אמות מכל צד של הריבוע. שני הכללים של דייני דקיסרי עוסקים אפוא במרחק שבין זוויתיו של ריבוע ובין העיגול החסום בתוכו, ולהיפך: במרחק בין קשתות העיגול ובין צלעות הריבוע החסום בתוכו.

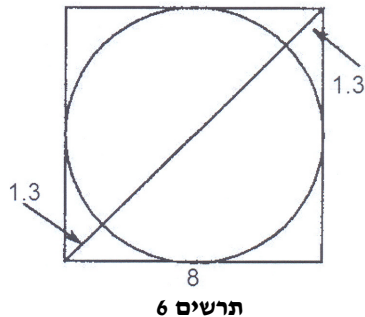
הבנה זו של מימרת דייני קיסרי היא המתיישבת ביותר בלשון 'ריבועא דנפיק מגו עיגולא פלגא', שכן לפי הפירוש המקובל אין הריבוע הפנימי חצי מהעיגול אלא שני שלישי [או בשטח, או בהיקף], והכוונה במילה 'פלגא' היא לומר שהריבוע הפנימי הוא חצי מהריבוע החיצון הכולא את העיגול בתוכו. פירוש זה דחוק קצת, שכן כמו שאמרו דייני דקיסרי "עיגולא דנפיק מגו ריבועא ריבעא" והתכוונו ליחס שבין הריבוע החוסם לעיגול שבתוכו, כך היה להם להמשיך ולומר "ריבועא דנפיק מגו עיגולא - תילתא (שליש)" שזהו היחס בין העיגול לריבוע הכלוא בתוכו!

אבל לפי הבנת רב חנילאי אכן דייני דקיסרי מתכוונים בדיוק ליחס שבין העיגול לריבוע הפנימי, שכן הקוטר של העיגול הוא בדיוק פי שנים מאורך צלע הריבוע הכלוא בתוכו [לפי ההנחה שלהם שעיגול שקוטרו 8 יכיל בתוכו ריבוע שצלעו 4].

ביאור משנת אהלות על פי רבי חנילאי

מעתה, אם נניח שהתנא דאהלות סבור כרבי חנילאי, תתבאר המשנה כפשוטה ובדיוק!

כאמור, עמוד שהיקפו 24 טפחים, קוטרו הוא שמונה טפחים. אלכסונו של ריבוע החוסם את העיגול יכלול עוד שליש של שמונה טפחים, דהיינו שני טפחים ושני שלישי. האורך הזה מתחלק לטפח ושליש בכל קרן (ראה תרשים 6), והרי זהו בדיוק



אלכסונו של ריבוע טפח על טפח לפי רב חנילאי שסובר 'אמתא בריבועא - אמתא ושליש באלכסונא'! דברי התנא באהלות מדוייקים אפוא להפליא לפי הבנתו של רב חנילאי. וכאמור: ההבדל בין 'אמתא ותרי חומשי' ובין 'אמתא ושליש' הוא הבדל קטן למדי, פחות משבע מאיות. נמצא אם כן שרבנן דקיסרי לא סברו ש'אמתא בריבועא - תרי אמין באלכסונא' כפי שסברו תוספות, שכן טעות כזו היא ממש

בגדר 'דבר הנראה לעיניים', אלא להיפך: הם הקטינו את שיעור האלכסון עוד יותר, וסברו שהוא רק שלישי מצלע הריבוע.

ונציין נקודה מעניינת: רבי חנילאי הוציא את כלל האלכסון שלו מן הכלל של "כמה מרובע יתר על העיגול - רביע", שכן הוא הבין אותו בנוגע לקוטרו של העיגול החסום, שקטן ברבע מאלכסונו של הריבוע החוסם. והנה, התנא דאהלות מביא אף הוא את הכלל הזה של "מרובע יתר על העיגול רביע" במשנה ו, שהיא המשנה הקודמת למשנת 'עמוד' שעסקנו בה. מסתבר שהתנא, כמו רבי חנילאי, גזר את כלל האלכסון של ריבוע מן הכלל של 'מרובע יתר על העיגול רביע', ולפיו יצא לו שהאלכסון יתר שלישי על צלע הריבוע, ולא 'תרי חומשי'¹⁸.

דעת רבי יוסי

לפי זה כמובן שמתבארת היטב דעת ר' יוסי המצריך היקף של 25 טפחים; לדעתו טפח אחד מההיקף שוקע בקרקע, וחשוב המבוסס על קוסינוס הזווית הנשענת על 1/50 מההיקף המעגל מראה שכנגד טפח אחד מן ההיקף שוקעים 0.063 חלקי הטפח

18 רעיון זה של ביאור המשנה באהלות על פי ההנחה שאלכסון הריבוע הוא פי 1.3 מצלעו הובא כבר במאמרם של דוד גרבר ובוועז צבאן (דף שבועי של אוניברסיטת בר אילן, מס' 192, חוקת תשנ"ז). אלא ששם מוסברת דרך החישוב של המשנה על פי שיטה שהובאה בהקדמת הספר 'ארץ חיים' להרב חיים סתהון, ולפיה מחשבים את שורש 2 [שעל ידיו מחשבים את אלכסון הריבוע] בצורה של קירובים, שיטה הנקראת אינטרפולציה ליניארית (המשנה השתמשה בשלב הפשוט והראשוני יותר של החישוב, בנוסחה דלהלן, ולפיכך קיבלה שהשיעור הוא אחד ושליש: $1 + 1/3 = (4 - 1) / (2 - 1) + 1$). אמנם לפי הסבר זה אין שום קשר בין המשנה באהלות לשיטת דייני דקיסרי, ואנו עסקנו כאן בדברי רבינו חננאל שמקשר בין הדברים. לפי מה שכתבנו כעת, נמצא שהקירוב הזה אכן נגזר מן הכלל של דייני דקיסרי. ונראה לי שגם דברי רב חנילאי מוכיחים שלא הנוסחה היא עמדה לנגד עיניו. שכן הוא מבסס את דבריו על הכלל של 'כמה מרובע יתר על העיגול רביע'. ואילו לפי הקירוב הליניארי הנ"ל אין שום קשר בין דרך חישוב האלכסון לכלל של 'מרובע יתר על העיגול רביע'.

מן הקוטר לפי השיעור המדוייק של π , ואם נתפוס את הקירוב של $\pi = 3$, יהיה שיעור השקיעה 0.066 טפחים¹⁹. קשה לדעת כיצד חישוב רבי יוסי את שיעור שקיעת הקוטר, כי לבטח לא היו לפניו יחסי הסינוסים והקוסינוסים. מכל מקום ברור שהוא סבר שהשקיעה גורמת שכבר לא יהיה אפשר ליצור ריבוע של טפח על טפח בצידי העיגול החסום. וזה בלתי אפשרי לפי הכלל של 'אמתא בריבועא - אמתא ותרי חומשי באלכסון', כפי שהוכחנו לעיל.

עיגול שהיקפו 25 טפחים קוטרו יהיה שמונה טפחים ושליש, וזה יהיה גם אורכן של צלעות הריבוע החוסם אותו. האלכסון של ריבוע כזה לפי הכלל של 'אמתא ושליש באלכסון' יוסיף שני טפחים ו-14/18 של הטפח. נמצא שבכל אחת מזוויות הריבוע החוסם את העיגול אפשר לרבע ריבוע קטן שאלכסונו הוא טפח ועוד 7/18 טפחים, מעט יותר מטפח ושליש. צלעותיו של ריבוע כזה, המהוות 3/4 מן האלכסון²⁰, הן טפח ועוד 1/24 טפחים. תוספת זו של 1/24 חלקי הטפח מכסה די והותר את שיעור השקיעה, שהוא פחות משבע מאיות הטפח. יש כאן אמנם 'לא דק', אבל בשיעור זעיר מאוד שאפשר באמת להתעלם ממנו. ויתכן גם שרבי יוסי סבר ששיעור השקיעה גדול יותר, שכן לא ברור בדיוק מה היתה דרך החישוב שלו.

ויתכן שזו הסיבה שרבינו חננאל ציטט דווקא את התוספתא של אהלות, ולא את המשנה שמפורש בה אותו דין. וזה פלא, שהרי דינו של ר' יוסי אינו קשור לכאן כלל, ומה ראה ר"ח לשבוק את המשנה ולקחת את התוספתא? אלא שר' יוסי מוכיח כי דין המשנה בנוי על פי כלליהם של דייני דקיסרי.

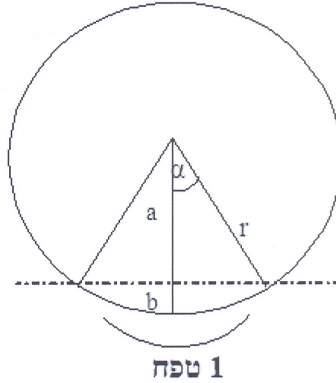
אם כנים דברינו, הרי שזו הוכחה נוספת לדעת רש"י והתוספות כי דייני דקיסרי עצמם סברו שיחס היקף העיגול למרובע החסום בתוכו הוא 3:2, ולא כפי שניסו המאירי, או הגר"א (עיין בביאורו לעירובין עו, ב וש"ע או"ח סי' שעב) לפרש בדבריהם, שכן המשנה באהלות אינה מתפרשת באופן מדוייק אלא דווקא לפי תפיסה זו של יחס היקף העיגול לריבוע החסום בתוכו²¹.

19 את צורת החישוב ראה בנספח.

20 שהרי אם אלכסון הריבוע גדול בשליש מצלעו, נמצא שצלע הריבוע היא 3/4 מן האלכסון.

21 אני מודה מקרב לב לרב ד"ר דוד גרבר שהעיר הערות חשובות לנוסח הראשון של המאמר, והאיר את עיניי בכמה עניינים. שכרו כפול מן השמים.

נספח: חישוב שיעור הקוטר השוקע בקרקע



לפנינו חתך של הגליל בהיקף 25 טפחים, וטפח מהיקפו שקוע מתחת לפני הקרקע (הקו המרוסק); קטע הקוטר השוקע מתחת לפני הקרקע הוא b. כדי לחשב אותו אנו מכפילים את הקוטר בקוסינוס הזווית α , הנשענת על קשת של חצי טפח, שהיא 1/50 מהיקף המעגל. דהיינו $360/50 = 7.2$ מעלות.

לכן:

$$a = r * \cos(\alpha) = r * \cos(7.2) = 0.992r$$

ומכאן ש-b, שהוא אורך השקיעה, מקיים:

$$b = r - a = r - 0.992r = 0.008r$$

אם במקרה שלנו $r = 25/\pi = 7.957$ נובע מכך:

$$b = 0.008 * 7.957 = 0.0637$$

אם נתפוס את הקירוב של $\pi = 3$ ישתנה החישוב מעט, כי r יהיה 25/3, דהיינו שמונה ושליש, ואז יהיה שיעורו של b:

$$b = 0.008 * 8.333 = 0.0667$$

בכל מקרה שיעור שקיעת הקוטר לא יגיע לשבע מאיות הטפח.