

הרמב"ם על דימוע ועישורייתא דרבי והמספר e

פתיחה

אחד המספרים החשובים והשימושיים ביותר במדעים המדויקים הוא המספר e. מספר זה, השווה בקרוב ל-2,71828, נתגלה לפני כארבע מאות שנה. יקותיאל גינצבורג¹ במאמרו היפהפה: "מידות ומספרים בתלמוד"² הפתיע כשהראה שקירוב למספר e נמצא כבר בתלמוד הירושלמי. במאמרו נסקרו סדרות הנדסיות שונות המופיעות בש"ס ובספרות ההלכה, ולא באתי אלא 'כיהודה ועוד לקרא' לנסות ליישב את דברי הרמב"ם אותם השאיר גינצבורג ב"צריך עיון". מכיון שאין מאמרו של גינצבורג מצוי בידי הרבים, נסכם בראשית הדברים את עיקרי דבריו.

א. המספר e

אחד המספרים הממשיים בעלי החשיבות המרכזית ביותר במתמטיקה ובשאר המדעים הוא המספר e. מספר זה נתגלה כנראה ע"י ג'ון נפייר מסקוטלנד לפני כארבע מאות שנה, בעת הכנת לוחות הלוגריתמים הראשונים. יעקוב ברנולי משוויצריה התבונן מאוחר יותר בסדרה האינסופית של המספרים, שאברה הראשון הוא $0 = (1 - \frac{1}{1})^1$, אברה השני הוא $\frac{1}{4} = (1 - \frac{1}{2})^2$, אברה השלישי $\frac{8}{27} = (1 - \frac{1}{3})^3$, ובאופן כללי, האבר ה-n הוא $(1 - \frac{1}{n})^n$. הוא הוכיח שסדרה זו מתכנסת ל- $\frac{1}{e} \approx 0.36787944117144232159552377016147 \dots$ כאשר n שואף לאינסוף.

הפרסום של e החל בעבודותיו של ליאונרד אוילר, גם הוא משוויצריה, בהן נעשה שימוש נרחב בקבוע זה במתמטיקה ובפיזיקה. אוילר הוכיח, בפרט, שהמספר e אינו רציונלי, כלומר אינו ניתן לביטוי כחס בן שני מספרים שלמים. מספר אחר בעל תכונה זו הוא 3π . אי-רציונליותם של שני מספרים אלה הוכחה במקביל לפני פחות משלוש מאות שנה.

1 יקותיאל גינצבורג (תרמ"ט-תשי"ז) נולד בליפניקי (והלין). היגר לארה"ב בשנת תרע"ב. כיהן כפרופסור באוניברסיטת קולומביה שבניו יורק, וכראש החוג למתמטיקה בישיבה אוניברסיטה מאז הקמתה. חיבר מאמרים רבים אודות המתמטיקה בספרות הרבנית, ההיסטוריה של המתמטיקה ודרכי הוראתה. היה פעיל ציוני ומעורב בהקמת אוניברסיטת בר-אילן. מתלמידיו: הלל פירסטנברג, מבכירי המתמטיקאים בימינו.

2 בתוך: יקותיאל גינצבורג, כתבים נבחרים, הוצאת ניומן, תשכ"א. ראה גם פרק ראשון בספרו של מאיר ליטמן: *Approaching Infinity*, הוצאת פלדהיים 1990.

3 ידועים דברי הרמב"ם בפירוש המשנה (מסכת עירובין פרק א משנה ה): "צריך אתה לדעת שיחס קוטר העיגול להיקפו בלתי ידוע, ואי אפשר לדבר עליו לעולם בדיוק, ואין זה חסרון ידיעה מצדנו כמו

ב. המספר e בתלמוד

כאמור, גינצבורג גילה שהערכה מקורבת קדומה ומפתיעה של e מופיעה בתלמוד הירושלמי.

בתלמוד הבבלי מסכת כתובות דף סח, א מצאנו:

"אמר רבי: בת הניזונית מן האחין - נוטלת עישור נכסים. אמרו לו לרבי: לדברין, מי שיש לו עשר בנות וכן, אין לו לבן במקום בנות כלום! אמר להן, כך אני אומר: ראשונה נוטלת עישור נכסים, שניה - במה ששיירה, ושלישית - במה ששיירה".

כלומר, כאשר עשר בנות צריכות להיזון הבן נוטל $(1 - \frac{1}{10})^{10}$ מהירושה. גודל זה מחושב בירושלמי שם (פ"ו ה"ה): "נמצאו הבנות נוטלות תרין חולקין פרא ציבחד, והבן נוטל חד חולק ואוף ציבחד". "פרא" - פירושו פחות, "ואוף" - ועוד, כמבואר ברש"י (נדרים לט, ב): "מפרש בתלמוד ירושלמי נמצאו בנות שנוטלות במנה תרי תילתי פחות ציבחר והאי תילתא ומוסיף ציבחר"⁴. המילה "ציבחר" מופיעה בתרגום יונתן כתרגום ל"מצער", בתרגום ישעיהו ל"מזער" ובתרגום איוב ל"זעיר". על פי זה, הערכת הירושלמי היא שהבן מקבל שלישי ועוד חלק זעיר. חישוב של חלק זעיר זה מופיע אצל רב סעדיה גאון בספרו "חוקי הירושות"⁵, והוא פחות במעט מ-1/60.

אברי הסדרה הנ"ל של ברנולי מופיעים עוד מספר פעמים בספרות התלמודית. בתלמוד בבלי נדרים לט, ב מצאנו:

"אמר רבי אחא בר חנינא: כל המבקר חולה - נוטל אחד משישים בצערו. אמרי ליה: אם כן, ליעלון שיתין ולוקמה! אמר ליה: כעישורייתא דבי רבי".

הביטוי $(1 - \frac{1}{10})^{10}$ מכונה כאן "עישורייתא דבי רבי", והביטוי $(1 - \frac{1}{60})^{60}$ מכונה "כעישורייתא דבי רבי", כלומר, הדומה ל"עישורייתא דבי רבי". אכן גם ערכיהם קרובים⁶⁷.

שחושבים הסכלים, אלא שדבר זה מצד טבעו בלתי נודע ואין במציאותו שיוודע. אבל אפשר לשער בקירוב. וכבר עשו מומחי המהנדסים בזה חיבורים, כלומר לידיעת יחס הקוטר להיקפו בקירוב".

4 לפירוש "פרא" ו"אוף" ראה גם גינצבורג שם, וראה גם ירושלמי דמאי פ"ה ה"ב.

5 ראה גינצבורג שם (החשובים אצל רס"ג הם עד כדי חלק האלף).

6 עישורייתא דרבי שווה לערך ל-0.349 ואילו שארית המחלה שמשאירים המבקרים אצל החולה שווה לערך ל-0.365.

7 ביטויים דומים עבור מערכים יותר גבוהים, ללא הערכות מפורשות, מופיעים במפרשי הש"ס. ראה תענית דף י, ב תוספות ד"ה פסיעה גסה (500 = n), מהרש"א חידושי אגדות מנחות דף כט, א ד"ה מי חסר (1000 = n).

ג. הרמב"ם על דימוע

מצאנו במשנה תרומות פרק ה משנה ז:

"סאה תרומה שנפלה למאה, הגביהה ונפלה אחרת, הגביהה ונפלה אחרת, הרי זו מותרת, עד שתרבה תרומה על החולין".

העקרון אותו מיישמת המשנה הוא ביטול סאת תרומה שנתערבה במאה סאין של חולין. במקרה כזה מפרשים מהתערובת סאה אחת, והשאר מותר. אם המקרה חוזר ונשנה, התערובת מותרת "עד שתרבה תרומה על החולין". נשאלת השאלה, אחרי כמה פעמים "תרבה התרומה על החולין"?

תשובת הרמב"ם היא:

"עד שתרבה תרומה על החולין - עד שיפלו למאה סאה של חולין מאה סאה ועוד משהו של תרומה זה אחר זה"⁸.

לדעת הרמב"ם, התערובת מותרת כל עוד חלק החולין גדול יותר מ- $(1 - \frac{1}{101})^{101}$. אמנם פירוש הרמב"ם קשה, שכן $(1 - \frac{1}{101})^{101} \sim 0.366$, ומדוע אם כן התערובת מותרת רק עד מאה ואחת פעמים, הלא במספר פעמים הקטן בהרבה ממאה תרבה תרומה על החולין?⁹

הרמב"ם עצמו פסק "סאין התרומה מדמעת אלא לפי החשבון"¹⁰, ואילו כאן התעלם לכאורה מן החשבון הנכון. הדבר אומר דורשני.

הראב"ד¹¹ משיג וחולק, ובעקבותיו נתקשו מפרשי הרמב"ם ראשונים ואחרונים. בנוסף למפרשי הרמב"ם על אתר סוקר גינצבורג גם את הדיון בספר עטרת שאול, ובתשובת ר' עקיבא אייגר במענה ל"קושיא העצומה" ששאל בנו ר' שלמה אייגר¹². נציין בפרט את ביאור בעל ה"כסף משנה": לדעת הרמב"ם ש"קמא קמא בטיל" פירושו: "ראשון ראשון מתבטל והכל חולין". אך נשאלת השאלה, אם כן אף לאחר מיליון פעמים הכל חולין?

8 פירוש הרמב"ם למשנה שם. פירוש זה נפסק להלכה ע"י הרמב"ם בהלכות תרומות פ"ג ה"ה.

9 "החשבון האמיתי... שלפעם התשעה ושישים עדיין ליכא רוב תרומה, וכן שבעים לשיבה שישוב להיות רוב תרומה" (ר' שאול לוריא במענה לשאלת הרש"ש, בסוף ספרו עטרת שאול).

10 הלכות תרומות שם ה"ג.

11 שם ה"ה.

12 שו"ת רבי עקיבא איגר מהדורה קמא סימן רכב: "קושיא העצומה" ששאל בנו ר' שלמה אייגר והם "בכורי פרי תנובתך מאז יצאת מלפני לוורשא". יש להעיר שר' שלמה אייגר יצא לוורשא בהיותו בן ט"ו שנים.

13 ראה גם מראה הפנים על הירושלמי בתרומות שם. על המקורות אותם מביא גינצבורג ניתן להוסיף: אור שמח הלכות מאכלות אסורות פט"ז ה"ב.

גינצבורג מסכם: "שאלה זו על-דבר יסוד דעתו של הרמב"ם הפנתה אליה תשומת לב רבים מגאוני ישראל ... עוד נבוא לעיין בדבר זה באחד המאמרים הבאים. לעת עתה נשאיר את השאלה בצריך עיון". גינצבורג הלך לעולמו בטרם "הספיק לסדר ניירותיו ורעיונותיו אודות המתמטיקה העברית. הם נותרו במצב היולי, בערמת פתקאות ומראי מקומות... ספינתו החלה מתקרבת לחוף, אולם, אהה, הקברניט איננו"¹⁴!

בקעה הותיר לנו גינצבורג להתגדר בה.

ד. רוב ניכר

בגמרא בברכות דף מח, א נאמר: "אמר רבי יהודה בריה דרב שמואל בר שילת משמיה דרב: תשעה אכלו דגן ואחד אכל ירק - מצטרפין" [לזימון בעשרה]. על כך מובא שם המעשה הבא:

"אמר רבי זירא, בעאי מינייה מרב יהודה: שמונה מהו? שבעה מהו? - אמר ליה: לא שנה. שישה ודאי לא מיבעיא לי. אמר ליה רבי ירמיה: שפיר עבדת דלא איבעיא לך, התם טעמא מאי - משום דאיכא רובא, הכא נמי איכא רובא. ואיהו סבר: רובא דמינכר בעינן".

רבי זירא שאל מהו מספר אוכלי הפת המינימלי המאפשר זימון בעשרה. כאברהם בשעתו בכל שאלה הוריד את המספר הנדרש, ושוב כאברהם בשעתו הפסיק לשאול לפני שהגיע למינימום היוצר רוב. הגמרא מסבירה שרבי זירא לא שאל האם שישה אוכלי פת יספיקו, כי הוא סבר שצריך לפחות שבעה אוכלי פת מתוך עשרה, המהווים "רוב ניכר"¹⁵.

הרמב"ם פוסק כדעת רבי זירא: "אין מזמנין אלא על מי שאכל כזית פת ולמעלה. שבעה שאכלו פת ושלושה אכלו עמהן ירק או ציר וכיוצא בהן מצטרפין לזמן בשם, והוא שיהיה המברך מאוכלי הפת. אבל שישה שאכלו פת וארבעה ירק אין מצטרפין, עד שיהיו אוכלי הפת רוב הניכר"¹⁶.

אפשר להסיק: 0.7 - רוב ניכר, ואילו 0.6 - לא. ומה הדין בערכי ביניים?

תשובה לכך ברבינו יונה על הרי"ף שם: "השניים אצל השלושה רובא דמינכר הוי, כיון שהם שני חלקים. שלא אמרו אלא שהארבעה אין מצטרפין עם השישה, לפי שהשישה אינם שני חלקין מהעשרה ולפיכך אין הארבעה מצטרפין עמהם, אבל האחד

14 פנחס שוב, נפש לידיד. מופיע כאחרית דבר ל'כתבים נבחרים' לגינצבורג הנ"ל.

15 ראה רש"י שם.

16 הלכות ברכות פרק ה ה"ח.

שאכל ירק או ששתה היה נראה שמצטרף עם השניים". רבינו יונה סובר ששני שלישי הם רוב ניכר, ועל פי זה מסיק ששניים שאכלו פת ואחד שאכל ירק מצטרפים לזימון. וכן פסקו עוד ראשונים המובאים בהגהות מיימוניות על הרמב"ם שם.

ה. הסבר הרמב"ם על-פי העקרון של "רובא דמינכר"

מדוע מתיר הרמב"ם את תערובת התרומה בחולין עד מאה ואחת פעמים ולא עד בכלל?

נראה שהרמב"ם סובר שאכן התערובת מותרת מן התורה (כהסבר ה"כסף משנה" לעיל), אלא שחכמים גזרו לאוסרה עד שלא תהיה התרומה רוב מובהק, הדומה ל"רוב הניכר" בזימון עשרה. ואולי סובר הרמב"ם ש"תרי חולקין פרא ציבחר", שני שלישי פחות מעט, הם המינימום הנדרש לרוב ניכר, ולפי זה על מיעוט החולין להיות יתר על שלישי ועוד מעט, "חד חולק ואוף ציבחר", דהיינו יותר מ- $(1 - \frac{1}{101})^{101}$. הרמב"ם מסתמך כאן על הקרוב של e בתלמוד הירושלמי, לכן מתיר הרמב"ם לערב עד מאה פעמים, ולא עד מאה ואחת.

המשך דברי הרמב"ם בהלכות ברכות לא מתאים, לכאורה, להסבר שהצענו. הרמב"ם ממשיך ואומר: "במה דברים אמורים בעשרה, אבל בשלושה צריך שיאכלו כל אחד ואחד מהן כזית פת ואח"כ מזומנין". לדעת הרמב"ם שני שלישי של אוכלי פת אינם מספיקים לזימון בשלושה, בניגוד לדעת רבינו יונה ובניגוד להסברינו!

אולם לעניות דעתי, דווקא דבריו אלה של הרמב"ם מסייעים לדברינו. הרמב"ם סובר שאין זימון בשלושה אלא במי שאכל פת, מה שאין כן בזימון עשרה, כמדויק מדבריו: "שלושה שאכלו פת כאחד חייבין לברך ברכת הזימון... היו האוכלין מעשרה ולמעלה מזומנין בשם¹⁷". כנראה סובר הרמב"ם שעיקר חיוב הזימון בשלושה הוא מדברי סופרים, ואולי אף מן התורה¹⁸, ואילו אזכרת שם בעשרה היא מדרבנן בלבד, ועל כן מועיל בה רק רוב הניכר. הרוב בדינים מדרבנן אלה (דיני זימון ודיני תערובת תרומה) הוא רוב ניכר של שניים (ומעט) לאחד (פחות מעט)¹⁹.

סיכום

במסגרת הדיון על סדרות הנדסיות בספרות התלמודית, הופיע במפתיע קרוב למספר e. במאמר זה ניסינו ליישב קושיא על הרמב"ם תוך שימוש בקרוב זה.

17 ה"ב וה"ד שם. דיוק זה מופיע באחרונים. ראה למשל יצחק ירנן על פ"ה ה"ח. ראה גם כס"מ שם.

18 "ברכת הזימון מן התורה" תוספתא ברכות פ"ו ה"א, וראה גם ספרי דברים פיסקא שו.

19 תודה לערן רביב, מנחם גולדשטיין, אוריאל ברגמן ובני אביעד על הערותיהם המחכימות.